# Fonctions affines

## I. Définition

Définition :
Une fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$, est dite **affine** s'il existe deux constantes $a$ et $b$ tels que, pour tout réel $x$, on ait $f(x) = ax + b$.
Si de plus $b = 0$, alors $f$ est une fonction **linéaire**.
Si de plus $a = 0$, alors $f$ est une fonction **constante**.

Exemple :
Soient $f, g$ et $h$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -6x$ et $h(x) = 1$.
$f$ est une fonction affine, $g$ est une fonction linéaire et $h$ est une fonction constante.

## II. Sens de variation d'une fonction affine

Propriété :
Soit $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations selon le signe de $a$ :

| $a < 0$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | |

| $a = 0$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $\rightarrow$ | |

| $a > 0$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | |

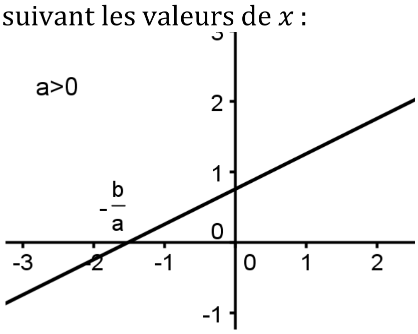
Démonstration :
Soit $u$ et $v$ deux nombres réels tels que $u < v$.
Si $a > 0$, alors $au < av$ et $au + b < av + b$ c'est-à-dire $f(u) < f(v)$.
Donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On ferait une démonstration similaire dans le cas où $a < 0$.

## III. Représentation graphique et étude de signe

Propriété : La représentation graphique de la fonction affine $f$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

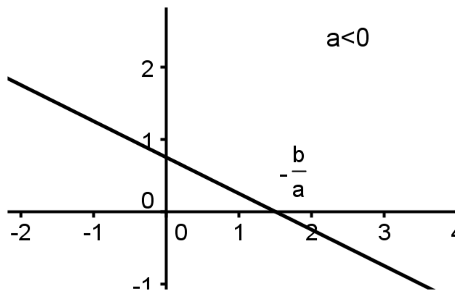
Vocabulaire : $a$ est appelé **coefficient directeur** et $b$ **l'ordonnée à l'origine.**

Etude de signe de $ax + b$ avec $a \neq 0$
On sait que $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ car $a \neq 0$
Ce résultat et le sens de variation de $f$ suivant les valeurs de $a$ permettent de connaître le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$ :




$ax + b > 0$

$ax + b < 0$




On résume ces résultats par un tableau de signes :

Propriété : Règle du signe de $ax + b$

$a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $ax + b$ | $-$ | 0 | $+$ |

$a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $ax + b$ | $+$ | 0 | $-$ |